



## SELECCIONES MATEMÁTICAS

Universidad Nacional de Trujillo

ISSN: 2411-1783 (Online)

Vol. 02(02): 83 - 103 (2015)

**Elemento finito aplicado a un problema elíptico en dominio no regular.****Finite element applied to an elliptic problem in non-regular domain.**Melba Alvites Calipuy<sup>\*</sup> and Luis Lara Romero<sup>†</sup>

Received, Jul. 20, 2015

Accepted, Nov. 30, 2015.

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2015.02.03>**Resumen**

Estudiar el comportamiento de un problema elíptico se hace muchas veces muy complicado debido a la geometría del dominio y a las condiciones de contorno, por ello es necesario utilizar métodos numéricos para poder encontrar su solución. El método de los elementos finitos ha demostrado ser un método eficiente para tratar problemas de geometría no regular y de parámetros complicados. En esta investigación se ha tomado como referencia el problema de Poisson con condiciones de contorno mixtas. Se ha probado la existencia y unicidad de una solución débil verificando las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram. Se ha discretizado el dominio en elementos triangulares con tres nodos y un grado de libertad por nodo y para discretizar la ecuación diferencial se ha utilizado el método de Galerkin.

**Palabras clave.** Elemento finito, problema elíptico.

**Abstract**

Study the behavior of an elliptical problem is often very difficult due to the geometry of the domain and the boundary conditions, so it is necessary to use numerical methods to find a solution. The finite element method has proven to be efficient to treat problems of non-regular geometry and complicated parameters. This research has taken as reference the Poisson problem with mixed boundary conditions. It has proved the existence and uniqueness of a weak solution verifying the hypothesis Lax-Milgram theorem. The domain is discretized into triangular elements with three nodes and a degree of freedom per node and to discretize the differential equation has been used Galerkin method.

**Keywords.** Finite element, elliptic problem.

**1. Introducción.** En este trabajo de investigación se plantea el estudio de un problema elíptico con condición de frontera mixtas

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(\mathbf{x}) &= p & \text{sobre } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) &= h & \text{sobre } \Gamma_N \end{cases}$$

donde  $f \in L^2(D)$  y  $p, h$  son parámetros asociados con las propiedades físicas del contorno del dominio.

Existen diversos métodos analíticos para poder hallar la solución de (1.1), pero no siempre dichos métodos serán útiles para problemas complejos, como por ejemplo cuando se tiene fronteras de geometría irregular o cuando los parámetros son muy complicados; es por ello que se recurre a los métodos numéricos.

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es un método numérico que permite obtener la solución aproximada de una ecuación diferencial con condiciones de contorno mixtas y tratar con menos dificultad los problemas con dominios irregulares.

<sup>\*</sup> Melba E. Alvites Calipuy, Departamento de Ciencias, Universidad Privada del Norte, Trujillo, Perú. (melba.alvites@upn.pe),

<sup>†</sup> Luis A. Lara Romero, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-Perú (llara@unitru.edu.pe)

This work is licensed under the [Creative Commons Attribution-NoCommercial-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

En nuestro trabajo consideraremos que el problema (1.1) representa un problema de transferencia de calor en estado estacionario donde  $u$  es la temperatura y  $f$  es la función que expresa el calor generado internamente.

Walter Ritz (1878 - 1909), físico suizo desarrolló la formulación matemática del método de los elementos finitos, basada en el cálculo variacional. La incorporación del cálculo matricial al método de elementos finitos fue propuesta por el ingeniero ruso Boris G. Galerkin (1871 - 1945).

## 2. Material y Métodos.

**2.1. Objeto de estudio.** Para estudiar el comportamiento de los elementos finitos tomaremos el problema de contorno mixto

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(\mathbf{x}) &= p & \text{sobre } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) &= h & \text{sobre } \Gamma_N \end{cases}$$

donde  $f \in L^2(D)$  y  $p, h$  son parámetros asociados con las propiedades físicas del contorno del dominio.

**2.2. Métodos y técnicas.** Para estudiar el comportamiento de la solución analítica del problema (2.1) se ha considerado el método variacional y para el estudio numérico el método de los elementos finitos.

**2.2.1. Método variacional.** Formulamos variacionalmente el problema (2.1) considerando funciones test  $v \in C^\infty(\Omega)$  tal que  $v = 0$  en  $\Gamma_D$ . Entonces se tiene

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, d\Omega = -\int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega$$

Aplicamos la primera identidad de Green

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = -\int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ ,  $n$  es el vector unitario normal exterior  $\partial\Omega$ , pero  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,

$$(2.2) \quad -\int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega$$

luego por el hecho que  $v = 0$  en  $\Gamma_D$  tenemos:

$$(2.3) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Gamma_N} h v \, dS + \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega$$

Definimos la forma bilineal  $a(u, v)$  y la forma lineal  $l(v)$  por

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \\ l(v) &= \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS + \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega \end{aligned}$$

y el espacio  $V := \{u \in H^1(\Omega) / u = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$ .

Entonces tenemos el problema variacional

$$(2.4) \quad \begin{cases} \text{Hallar } u \in \{H^1(\Omega) \text{ tal que } u = p \text{ en } \Gamma_D\} \text{ tal que} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Consideremos un elemento  $\tilde{p} \in V$  tal que  $\tilde{p} = p$  en  $\Gamma_D$ .

Empleando la sustitución  $\tilde{u} := u - \tilde{p}$ , observamos que  $\tilde{u} \in V$ , luego (2.4) es equivalente a:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \text{Hallar } \tilde{u} \in V \text{ tal que} \\ a(\tilde{u}, v) = F(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}, v) &= \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \, d\Omega \\ F(v) &= l(v) - a(\tilde{p}, v) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Se verifica que  $a$  es bilinealidad y continua. Veamos la continuidad, es decir,

Existe  $c > 0$  tal que  $|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$

En efecto:

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \leq \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) d\Omega = \|u\|_{H^1}^2$$

entonces

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

luego para  $c=1$  se tiene la continuidad de  $a$

$$(2.6) \quad |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|$$

Ahora verificaremos si  $a$  es coerciva y simétrica, es decir

Existe  $\gamma > 0$  tal que  $a(u, u) \geq \gamma \|u\|^2 \quad \forall u \in V$

En efecto:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega + \frac{c}{2} \int_{\Omega} u^2 d\Omega \\ &\geq \gamma \left( \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega + \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right) \\ &= \gamma \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

donde  $\gamma = \min(\frac{1}{2}, \frac{c}{2})$ , entonces

$$(2.7) \quad a(u, u) \geq \gamma \|u\|^2, \quad \forall u \in V$$

Se verifica que  $F$  es una función lineal y acotada en  $V$ , es decir,

$$\text{Existe } c > 0 \text{ tal que } |l(v)| \leq c \|v\| \quad \forall v \in V$$

Primero tendremos en cuenta las siguientes desigualdades

$$(2.8) \quad \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$$

$$(2.9) \quad \|u\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{Teorema de la traza}$$

entonces

$$\begin{aligned} |F(v)| &= |l(v) - a(\tilde{g}, v)| \leq |l(v)| + |a(\tilde{p}, v)| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} + \|\tilde{p}\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{p}\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &= c \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

si  $c = (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Gamma)} + \|\tilde{p}\|_{H^1(\Omega)})$  entonces  $|F(v)| \leq c \|v\|$ .

Se ha verificado que  $F$  es una función lineal acotada y  $a$  una forma bilineal continua y coersiva; es decir cumple con las hipótesis del teorema de Lax Milgram por tanto el problema (2.5) tiene una única solución  $\tilde{u} \in V$ , tal que:

$$a(\tilde{u}, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

tenemos entonces

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}, v) &= l(v) - a(\tilde{p}, v) \\ a(\tilde{u}, v) + a(\tilde{p}, v) &= l(v) \\ a(\tilde{u} + \tilde{p}, v) &= l(v) \end{aligned}$$

por lo tanto  $u = \tilde{u} + \tilde{p}$  es la única solución de la formulación variacional original (2.4).

**2.2.2. Elementos finitos.** El primer paso en el método de los elementos finitos es dividir el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  en varios subdominios ó elementos en este caso elementos triangulares no traslapables.

Sean  $(x_i^e, y_i^e)$ ,  $i = 1, 2, 3$  las coordenadas de los vértices del elemento triangular denotado como  $\Omega^e$ .

Si consideramos tres nodos por cada triángulo ubicados en los vértices, utilizaremos tres números enteros para designarlos.

Para relacionar, el número del nodo global, el número del nodo local y el número del elemento, introducimos un arreglo de orden  $3 \times M$ , denotado por  $ne(i, e)$  donde  $i = 1, 2, 3$  y  $e = 1, 2, \dots, M$ , con  $M$  que denota el número total de elementos.

•  $ne(i, e)$  es llamada la matriz de conectividad donde  $i$ : numeración local de un nodo,  $e$ : numeración del elemento y el valor de  $ne(i, e)$  es la numeración global del nodo local  $i$  en el elemento  $e$ .

Una vez que se tiene el dominio discretizado, necesitamos aproximar la función desconocida  $u$  dentro de cada elemento, y éste es el segundo paso del análisis. Al usar elementos triángulos lineales, la función desconocida  $u$  dentro de cada elemento se aproxima como

$$(2.10) \quad u|_{\Omega^e} \simeq u^e = a^e + b^e x + c^e y$$

donde  $a^e, b^e$  y  $c^e$  son coeficientes constantes a ser determinados y  $e$  es el número del elemento. Para un elemento triangular lineal, hay tres nodos localizados en los vértices del triángulo. Asuma que los nodos se enumeran en sentido contrario a las agujas del reloj por números 1, 2 y 3 con los valores de  $u^e$  en los nodos denotados por  $u_1^e, u_2^e$  y  $u_3^e$ , respectivamente es decir

$$u_1^e = u^e(x_1^e, y_1^e), \quad u_2^e = u^e(x_2^e, y_2^e), \quad u_3^e = u^e(x_3^e, y_3^e)$$

por lo cual obtenemos

$$(2.11) \quad \begin{aligned} u_1^e &= a^e + b^e x_1^e + c^e y_1^e \\ u_2^e &= a^e + b^e x_2^e + c^e y_2^e \\ u_3^e &= a^e + b^e x_3^e + c^e y_3^e \end{aligned}$$

donde  $x_j^e$  y  $y_j^e$   $j=1,2,3$  denotan el valor de la coordenada del nodo  $j$  en el elemento  $e$ .

Resolviendo el sistema (2.11) para los coeficiente constantes  $a^e, b^e$  y  $c^e$  asumiendo que conocemos los valores  $u_1^e, u_2^e$  y  $u_3^e$  tenemos:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} a^e &= \frac{1}{2A^e} [u_1^e (x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e) + u_2^e (x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e) + u_3^e (x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e)] \\ b^e &= \frac{1}{2A^e} [u_1^e (y_2^e - y_3^e) + u_2^e (y_3^e - y_1^e) + u_3^e (y_1^e - y_2^e)] \\ c^e &= \frac{1}{2A^e} [u_1^e (x_3^e - x_2^e) + u_2^e (x_1^e - x_3^e) + u_3^e (x_2^e - x_1^e)] \end{aligned}$$

donde  $A^e$  es área del elemento triangular  $e$

$$A^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e) + (x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e) + (x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e)]$$

$$\text{Si} \quad \begin{aligned} a_1^e &= x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e & b_1^e &= y_2^e - y_3^e & c_1^e &= x_3^e - x_2^e \\ a_2^e &= x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e & b_2^e &= y_3^e - y_1^e & c_2^e &= x_1^e - x_3^e \\ a_3^e &= x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e & b_3^e &= y_1^e - y_2^e & c_3^e &= x_2^e - x_1^e \end{aligned}$$

en (2.12) tenemos

$$(2.13) \quad \begin{aligned} a^e &= \frac{1}{2A^e} [a_1^e u_1^e + a_2^e u_2^e + a_3^e u_3^e] \\ b^e &= \frac{1}{2A^e} [b_1^e u_1^e + b_2^e u_2^e + b_3^e u_3^e] \\ c^e &= \frac{1}{2A^e} [c_1^e u_1^e + c_2^e u_2^e + c_3^e u_3^e] \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.13) en (2.10)

$$(2.14) \quad u^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} [(a_1^e + b_1^e x + c_1^e y) u_1^e + (a_2^e + b_2^e x + c_2^e y) u_2^e + (a_3^e + b_3^e x + c_3^e y) u_3^e]$$

Definimos

$$(2.15) \quad N_j^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y), \quad j = 1, 2, 3$$

como las funciones de interpolación, (2.10) se puede escribir

$$u^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) u_j^e$$

con  $a_j^e = x_k^e y_l^e - x_l^e y_k^e$ ,  $b_j^e = y_l^e - y_k^e$ ,  $c_j^e = x_l^e - x_k^e$  los subíndices  $j, k, l$  varían de 1 a 3 y permutando  $j, k, l$  cíclicamente se pueden hallar las expresiones de cada parámetro.

Puede mostrarse fácilmente que las funciones de interpolación tienen la propiedad  $N_i^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij}$  lo cual da como resultado que en el nodo  $i$ ,  $u^e$  en (2.14) se reduce a su valor nodal  $u_i^e$ :

$$(2.16) \quad u_i^e = u^e(x_i^e, y_i^e) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x_i^e, y_i^e) u_j^e \quad i = 1, 2, 3$$

El área de cada elemento triangular puede ser hallado como:  $A^e = \frac{1}{2}(a_i^e + b_i^e x_i^e + c_i^e y_i^e)$ ,  $i = 1, 2, 3$  o  $A^e = \frac{1}{2}(b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e)$ .

Un hecho importante de  $N_i^e(x, y)$  es que se anula cuando el punto de observación  $(x, y)$  está en el lado contrario del  $i$ -ésimo nodo. Por consiguiente, el valor de  $u^e$  en un lado del elemento no se relaciona con el valor de  $u$  al nodo opuesto, si no está determinado por los valores en los dos puntos extremos de su lado asociado. Esto garantiza la continuidad de la solución a través de los lados del elemento.

Geoméricamente  $u^e(x, y)$  representa una superficie plana que pasa por  $u_1^e, u_2^e, u_3^e$ , la cual es una aproximación de la superficie dada por  $u(x, y)$ .

El segundo paso es la discretización de la ecuación diferencial en el problema (2.1). En efecto, definamos el residual de la ecuación diferencial en (2.1) por

$$R^e(\mathbf{x}) = -\Delta u^e(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^e(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^e$$

la integral de peso residual para el elemento  $e$  es

$$\int_{\Omega^e} R^e(\mathbf{x}) \cdot \omega \, d\omega$$

$\omega$  es una función peso de donde se tiene

$$-\int_{\Omega^e} \Delta u^e(\mathbf{x}) \cdot \omega \, d\Omega = \int_{\Omega^e} \mathbf{f}^e \cdot \omega \, d\Omega$$

por la primera identidad de Green tenemos

$$(2.17) \quad \int_{\Omega^e} \nabla u^e \cdot \nabla \omega \, d\Omega - \int_{\Gamma^e} \nabla u^e \cdot \mathbf{n}^e \omega \, d\Gamma = \int_{\Omega^e} \mathbf{f}^e \cdot \omega \, d\Omega$$

$\mathbf{n}^e$  es el vector normal exterior a  $\Gamma^e$ .

Sustituyendo la función aproximada para  $u$  en  $\Omega^e$

$$(2.18) \quad u^e = \sum_{j=1}^3 N_j^e u_j^e$$

en (2.17)

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{j=1}^3 N_j^e u_j^e \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{j=1}^3 N_j^e u_j^e \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} \, d\Omega &= \int_{\Gamma^e} D \cdot \mathbf{n}^e \omega \, d\Gamma + \int_{\Omega^e} \mathbf{f}^e \cdot \omega \, d\Omega \\ \sum_{j=1}^3 u_j^e \int_{\Omega^e} \nabla N_j^e \cdot \nabla \omega \, d\Omega &= \int_{\Gamma^e} D \cdot \mathbf{n}^e \omega \, d\Gamma + \int_{\Omega^e} \mathbf{f}^e \cdot \omega \, d\Omega \end{aligned}$$

por Galerkin se elige  $\omega = N_i^e$   $i = 1, 2, 3$  en (2.19)

$$\sum_{j=1}^3 u_j^e \int_{\Omega^e} \nabla N_j^e \cdot \nabla N_i^e d\Omega = \int_{\Gamma^e} D \cdot n^e N_i^e d\Gamma + \int_{\Omega^e} f \cdot N_i^e d\Omega \quad (2.20)$$

expresando en forma matricial (2.20)

$$K^e U^e = F^e, \quad e = 1, 2, \dots, M \quad (2.21)$$

donde

$$K^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix}, \quad F^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \end{Bmatrix} \quad y \quad U^e = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{Bmatrix}$$

y los elementos de  $K^e$  y  $F^e$  son

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \nabla N_j^e \cdot \nabla N_i^e d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left( \frac{b_i^e}{2A^e} \frac{b_j^e}{2A^e} + \frac{c_i^e}{2A^e} \frac{c_j^e}{2A^e} \right) d\Omega = \frac{b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e}{4(A^e)^2} \int_{\Omega^e} d\Omega = \frac{b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e}{4(A^e)^2} \cdot A^e$$

Entonces

$$k_{ij}^e = \frac{b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e}{4A^e} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.23)$$

se ve que  $K^e$  es simétrica y

$$F_i^e = f_i^e + g_i^e$$

donde

$$f_i^e = \int_{\Omega^e} f N_i^e d\Omega, \quad g_i^e = \int_{\Gamma^e} N_i^e D \cdot n^e d\Gamma \quad (2.24)$$

En las integrales (2.24) el elemento  $\Omega^e$  no se encuentra necesariamente ubicado en los lados de los ejes coordenados, para evaluar estas integrales es necesario una transformación de coordenadas, para lo cual utilizaremos un triángulo  $T_0$  ubicado en el primer cuadrante del plano  $(\xi, \eta)$ .

Definamos una transformación de coordenadas para el triángulo genérico  $T_0$ . En efecto, sea el triángulo arbitrario  $T$  con vértices en  $P_1, P_2, P_3$ , numerado en sentido antihorario, Figura (2.1) (a), la transformación de coordenadas tipo traslación rotación es dada por

$$P = P_1 + \xi(P_2 - P_1) + \eta(P_3 - P_1), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (2.25)$$

y el cambio de coordenada para  $x, y$  respectivamente son:

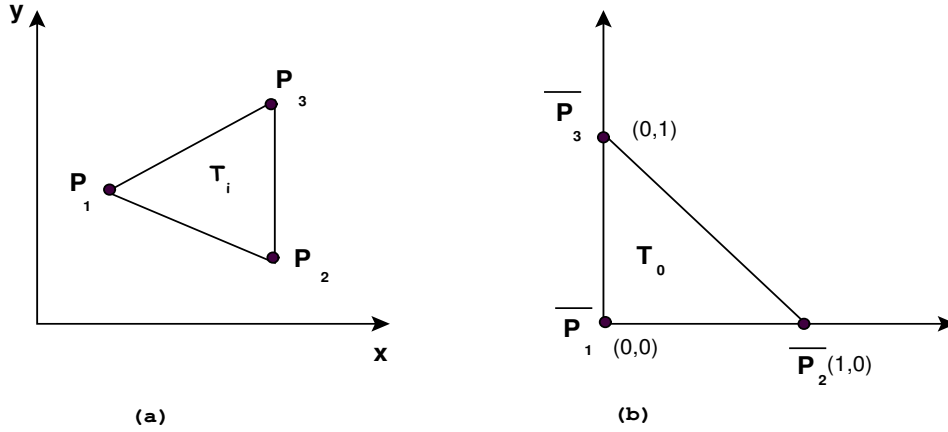
$$\begin{aligned} x &= x_1 + \xi(x_2 - x_1) + \eta(x_3 - x_1) \\ y &= y_1 + \xi(y_2 - y_1) + \eta(y_3 - y_1) \end{aligned}$$

realizando el mapeo hacia el triángulo estándar  $T_0$  (cuyos vértices correspondientes tienen índices equivalentes).

Entonces la integral sobre el triángulo  $T$  se cambia al del triángulo  $T_0$  que es de una área más simple. El jacobiano de la transformación es

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1),$$

$$d\Omega = dx dy = J d\xi d\eta$$

FIGURA 2.1. (a) Triángulo arbitrario  $T_i$ ; (b) Triángulo estándar

Por otro lado para determinar  $f_i^e$  es necesario implementar una subrutina que permita integrar sobre la región  $T_0$ . Sin embargo siempre se puede tomar un valor promedio sobre cada elemento, entonces (2.24) se transforma en

$$f_i^e = \int_{\Omega^e} \bar{f}^e \cdot N_i^e d\Omega = \bar{f}^e \int_{\Omega^e} \frac{1}{2A} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y) d\Omega$$

$$(2.26) = \frac{\bar{f}^e}{2A} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (a_i^e + b_i^e (x_1 + \xi(x_2 - x_1)) + \eta(x_3 - x_1) + c_i^e (y_1 + \xi(y_2 - y_1) + \eta(y_3 - y_1))) J d\xi d\eta$$

donde  $J = 2A^e$ , luego tenemos

$$(2.27) \quad \int_0^1 \int_0^{1-\xi} a_i^e d\xi d\eta = \frac{a_i^e}{2}$$

$$(2.28) \quad \int_0^1 \int_0^{1-\xi} b_i^e (x_1 + \xi(x_2 - x_1) + \eta(x_3 - x_1)) d\xi d\eta = b_i^e \frac{(x_1^e + x_2^e + x_3^e)}{6}$$

$$(2.29) \quad \int_0^1 \int_0^{1-\xi} c_i^e (y_1 + \xi(y_2 - y_1) + \eta(y_3 - y_1)) d\xi d\eta = c_i^e \frac{(y_1^e + y_2^e + y_3^e)}{6}$$

reemplazando (2.27), (2.28) y (2.29) en (2.26) tenemos

$$f_i^e = \frac{\bar{f}^e}{2A^e} 2A^e \left[ \frac{a_i^e}{2} + b_i^e \frac{(x_1^e + x_2^e + x_3^e)}{6} + c_i^e \frac{(y_1^e + y_2^e + y_3^e)}{6} \right] = \frac{\bar{f}^e}{2} [a_j^e + b_j^e \bar{x} + c_j^e \bar{y}]$$

$$= \frac{1}{3} \bar{f}^e \cdot A^e$$

Ahora el sistema de ecuaciones resultante debe ser ensamblado

$$(2.30) \quad \sum_{e=1}^M \mathbf{K}^e \mathbf{U} = \sum_{e=1}^M \mathbf{F}^e$$

donde  $\mathbf{F}^e = \mathbf{f}^e + \mathbf{g}^e$

Entonces (2.30) puede escribirse como  $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$  para  $M$  elementos y  $N$  nodos. Para ensamblar la matriz  $\mathbf{K}$  se usa la conectividad  $ne(i, e)$  donde  $i = 1, 2, 3$ ,  $e = 1, 2, \dots, M$ , esta matriz relaciona la numeración local con la numeración global de los nodos. En seguida se impone las condiciones de contorno del problema al sistema de ecuaciones (2.30). La condición de contorno de Dirichlet se aplican a los valores nodales cuyos nodos se encuentran sobre  $\Gamma_D$  y la condición Neumann a los segmentos cuyos extremos son los nodos que se encuentran sobre  $\Gamma_N$ .

Para la condición de Dirichlet sobre el contorno  $\Gamma_D$  donde  $u = p$ .

1. Enumerar los nodos sobre  $\Gamma_D$  y para ello usaremos  $nd(i)$  el cual dará información sobre la numeración global de los nodos en la frontera donde  $i = 1, \dots, N_d$ ,  $N_d$  es el número de nodos ubicados sobre  $\Gamma_D$ .

2. Asignaremos con  $p(i)$ , el valor nodal del nodo que se encuentran en  $\Gamma_D$ , es decir  $U_{nd(i)} = p(i)$ ,  $i = 1, \dots, N_d$
3. Realizar las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} F_{nd(i)} &\leftarrow p(i) \\ k_{nd(i), nd(i)} &\leftarrow 1 \\ k_{l, nd(i)} &\leftarrow 0 \quad l = 1, \dots, N; \quad l \neq nd(i) \end{aligned}$$

y finalmente

$$F_l \leftarrow F_l - k_{l, nd(i)} p(i)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N_d$ .

Ahora sea  $\Gamma_N$  parte de la frontera donde se tiene la condición de Neumann. Si hacemos los cálculos para  $g$  tenemos

$$(2.31) \quad g_i = \int_{\Gamma^s} N_j^e D \cdot n^e d\Gamma + \int_{\Gamma^{s+1}} N_l^{\bar{e}} D \cdot n^e d\Gamma$$

donde  $\Gamma^s$  y  $\Gamma^{s+1}$  son los segmentos que se conectan al nodo  $i$ ,  $\Gamma^s$  está a la derecha del nodo  $i$  y  $\Gamma^{s+1}$  está a la izquierda del nodo  $i$ ; además los índices  $(j, e)$ ,  $(l, \bar{e})$  están asociados a  $i$  por la siguiente relación

$$i = ne(j, e) = ne(l, \bar{e})$$

Recordemos que al inicio de este trabajo se habló acerca de la matriz de conectividad que relaciona los segmentos cuyos extremos son los nodos que se encuentran sobre  $\Gamma_N$  y la numeración global de los nodos.

Supongamos que sobre  $\Gamma_N$  tenemos  $M_s$  nodos, tal que:

$$\begin{aligned} ns(1, s) &= \text{nodo 1 del segmento } s \\ ns(2, s) &= \text{nodo 2 del segmento } s \end{aligned}$$

luego del arreglo  $ns$  tenemos:

$$i = ns(2, s) = ns(1, s+1)$$

entonces en (2.31)

$$(2.32) \quad g_i = \int_{\text{nodo } ns(1, s)}^{\text{nodo } j} N_j^e D \cdot n^e d\Gamma + \int_{\text{nodo } j}^{\text{nodo } ns(2, s+1)} N_l^{\bar{e}} D \cdot n^e d\Gamma$$

Reparametrizando el segmento  $s$  tenemos la siguiente transformación

$$T^s(\xi) = (x_1^s, y_1^s) + \xi(x_2^s - x_1^s, y_2^s - y_1^s), \quad \xi \in [0, 1]$$

y el jacobiano  $l^s = J = \sqrt{(x_2^s - x_1^s)^2 + (y_2^s - y_1^s)^2}$ . Análogamente para el segmento  $s+1$ . Entonces en (2.32)

$$\begin{aligned} g_i &= \int_0^1 N_j^e(T^s(\xi)) (q(T^s(\xi)) - \gamma(T^s(\xi)) u^s(T^s(\xi))) l^s d\xi + \\ &\quad \int_0^1 N_l^{\bar{e}}(T^{s+1}(\xi)) (q(T^{s+1}(\xi)) - \gamma(T^{s+1}(\xi)) u^{s+1}(T^{s+1}(\xi))) l^{s+1} d\xi \\ g_i &= \int_0^1 \xi(q - \gamma u^s) l^s d\xi + \int_0^1 (1 - \xi)(q - \gamma u^{s+1}) l^{s+1} d\xi \end{aligned}$$

$l^s$ ,  $l^{s+1}$  denota la longitud del segmento  $s$  y  $s+1$  respectivamente; de aquí en adelante escribiremos  $q$  en lugar  $q(T(\xi))$ . Reemplazando las funciones  $u^s$  y  $u^{s+1}$  donde ahora sobre  $[0, 1]$  las funciones  $u^s$  y  $u^{s+1}$  están dadas por:

$$u^s = \sum_{j=1}^2 N_j^s u_j^s, \quad u^{s+1} = \sum_{j=1}^2 N_j^{s+1} u_j^{s+1}$$



donde  $N_j^s$  y  $N_j^{s+1}$  son las funciones base en  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} g_i &= \int_0^1 \xi(q - \gamma \sum_{j=1}^2 N_j^s u_j^s) l^s d\xi + \int_0^1 (1 - \xi)(q - \gamma \sum_{j=1}^2 N_j^{s+1} u_j^{s+1}) l^{s+1} d\xi \\ &= \int_0^1 \xi q d\xi - \sum_{j=1}^2 u_j^s \int_0^1 \xi \gamma N_j^s l^s d\xi + \int_0^1 (1 - \xi) q l^{s+1} d\xi - \sum_{j=1}^2 u_j^{s+1} \int_0^1 \gamma (1 - \xi) N_j^{s+1} l^{s+1} d\xi \end{aligned}$$

como  $N_1^{s+1} = 1 - \xi$  y  $N_2^s = \xi$  entonces

$$g_i = \int_0^1 N_2^s q l^s d\xi - \sum_{j=1}^2 u_j^s \int_0^1 \gamma N_2^s N_j^s l^s d\xi + \int_0^1 N_1^{s+1} l^{s+1} q d\xi - \sum_{j=1}^2 u_j^{s+1} \int_0^1 \gamma N_1^{s+1} N_j^{s+1} l^{s+1} d\xi$$

Si denotamos como:

$$(2.33) \quad \begin{aligned} b_2^s &= \int_0^1 N_2^s q l^s d\xi \quad y \quad b_1^{s+1} = \int_0^1 N_1^{s+1} l^{s+1} q d\xi \\ k_{2j}^s &= \int_0^1 \gamma N_2^s N_j^s l^s d\xi \quad y \quad k_{1j}^{s+1} = \int_0^1 \gamma N_1^{s+1} N_j^{s+1} l^{s+1} d\xi \end{aligned}$$

entonces

$$g_i = b_2^s - \sum_{j=1}^2 u_j^s k_{2j}^s + b_1^{s+1} - \sum_{j=1}^2 u_j^{s+1} k_{1j}^{s+1}$$

además se cumple

$$i = ns(2, s) = ns(1, s + 1)$$

los valores  $b_2^s, b_1^{s+1}$  son asignados a  $F_i$

$$g_i = b_2^s + b_1^{s+1}$$

valores de  $k_{2j}^s$  y  $k_{1j}^{s+1}$  son asignadas a la matriz  $K$  mediante las siguiente asignación:

$$\begin{aligned} k_{i \, ns(j, s+1)} &\leftarrow k_{i \, ns(j, s+1)} + k_{1j}^{s+1} \\ k_{i \, ns(j, s)} &\leftarrow k_{i \, ns(j, s)} + k_{2j}^s \end{aligned}$$

Para evaluar la integral sobre el elemento  $e$  aplicamos la regla simple de Simpson:

$$(2.34) \quad \int_0^1 h(\xi) d\xi = \frac{1}{6} [h(0) + 4h(\frac{1}{2}) + h(1)]$$

luego en (2.33) tenemos:

$$(2.35) \quad b_2^s = l^s \int_0^1 N_2^s q d\xi = l^s \int_0^1 \xi q(T^s(\xi)) d\xi$$

si hacemos  $h(\xi) = \xi q(T^s(\xi))$  entonces

$$h(0) = 0, \quad h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} q(T^s(\frac{1}{2})), \quad h(1) = q(T^s(1))$$

recordando que la parametrización del segmento  $s$  es

$$T^s(\xi) = (x_1^s + \xi(x_2^s - x_1^s), y_1^s + \xi(y_2^s - y_1^s))$$

entonces

$$T^s\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x_1^s + x_2^s}{2}, \frac{y_1^s + y_2^s}{2}\right) \quad y \quad T^s(1) = (x_2^s, y_2^s)$$

luego en (2.35)

$$\begin{aligned} b_2^s &= l^s \int_0^1 h(\xi) d\xi = \frac{l^s}{6} [h(0) + 4h\left(\frac{1}{2}\right) + h(1)] \\ &= \frac{l^s}{6} \left[ 0 + 4 \frac{1}{2} q\left(\frac{x_1^s + x_2^s}{2}, \frac{y_1^s + y_2^s}{2}\right) + q(x_2^s, y_2^s) \right] \\ &= \frac{l^s}{6} \left[ 2q\left(\frac{x_1^s + x_2^s}{2}, \frac{y_1^s + y_2^s}{2}\right) + q(x_2^s, y_2^s) \right] \end{aligned}$$

Análogamente tenemos

$$(2.36) \quad b_1^{s+1} = l^{s+1} \int_0^1 N_1^{s+1} q d\xi = l^{s+1} \int_0^1 (1 - \xi) q(T^{s+1}(\xi)) d\xi = l^{s+1} \int_0^1 h(\xi) d\xi$$

donde  $h(\xi) = (1 - \xi)q(T^{s+1}(\xi))$  entonces

$$\begin{aligned} b_1^{s+1} &= \frac{l^{s+1}}{6} [h(0) + 4h\left(\frac{1}{2}\right) + h(1)] \\ &= \frac{l^{s+1}}{6} \left[ q(x_1^{s+1}, y_1^{s+1}) + 4 \frac{1}{2} q\left(\frac{x_1^{s+1} + x_2^{s+1}}{2}, \frac{y_1^{s+1} + y_2^{s+1}}{2}\right) + 0 \right] \\ &= \frac{l^{s+1}}{6} \left[ q(x_1^{s+1}, y_1^{s+1}) + 2q\left(\frac{x_1^{s+1} + x_2^{s+1}}{2}, \frac{y_1^{s+1} + y_2^{s+1}}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

**3. Problema de aplicación.** Aplicamos el método de los elementos finitos a un problema de transferencia de calor en estado estacionario. Veamos, si  $u(x, y)$  representa la temperatura de una lámina  $D$ , entonces  $u$  satisface la ecuación de Poisson

$$(3.1) \quad \Delta u(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in D$$

sujeta a las condiciones de contorno

$$(3.2) \quad \begin{cases} u(x, y) = 4 & \text{para } (x, y) \in L6 \text{ y } (x, y) \in L7 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = x & \text{para } (x, y) \in L2 \text{ y } (x, y) \in L4 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = y & \text{para } (x, y) \in L5 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{2}} & \text{para } (x, y) \in L1 \text{ y } (x, y) \in L3 \end{cases}$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial n}$  denota la derivada direccional en la dirección a la normal de la frontera de la región  $D$  en el punto  $(x, y)$  donde  $D$  es la región que aparece en la Figura (3.1).

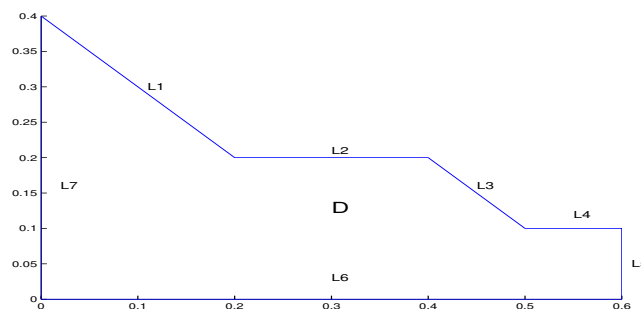


FIGURA 3.1. Dominio con su frontera

La malla generada por elementos triangulares consta de 10 elementos y 11 vértices de los cuales 6 de los vértices corresponden a la condición de tipo Dirichlet y 5 corresponden a la condición de Neumann Figura (3.2).

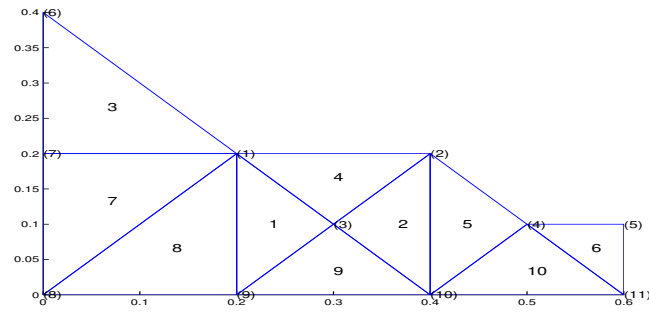


FIGURA 3.2. Discretización del dominio en 10 elementos triangulares

con matriz de conectividad  $n(i, e)$  de nodos

$e$	$n(1, e)$	$n(2, e)$	$n(3, e)$
1	1	9	3
2	2	3	10
3	1	6	7
4	1	3	2
5	2	10	4
6	4	11	5
7	1	7	8
8	1	8	9
9	3	9	10
10	4	10	11

La función desconocida  $u$  dentro de cada elemento se aproxima como

$$u^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) u_j^e$$

donde las funciones de interpolación  $N_j^e$  son dados por

$$N_j^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y) \quad j = 1, 2, 3$$

y  $A^e$  es el área del elemento triangular  $e$ .

Para el **elemento**  $e = 1$  calculamos los coeficientes  $a_i^1, b_i^1, c_i^1 \quad i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} a_1^1 &= x_2^1 y_3^1 - x_3^1 y_2^1 = (0,2)(0,1) - 0,0(0,3) = 0,02 \\ a_2^1 &= x_3^1 y_1^1 - x_1^1 y_3^1 = (0,3)(0,2) - (0,1)(0,2) = 0,04 \\ a_3^1 &= x_1^1 y_2^1 - x_2^1 y_1^1 = (0,2)(0,0) - (0,2)(0,2) = -0,04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1^1 &= y_2^1 - y_3^1 = 0,0 - 0,1 = -0,1 & c_1^1 &= x_3^1 - x_2^1 = 0,3 - 0,2 = 0,1 \\ b_2^1 &= y_3^1 - y_1^1 = 0,1 - 0,2 = -0,1 & c_2^1 &= x_1^1 - x_3^1 = 0,2 - 0,3 = -0,1 \\ b_3^1 &= y_1^1 - y_2^1 = 0,2 - 0,0 = 0,2 & c_3^1 &= x_2^1 - x_1^1 = 0,2 - 0,2 = 0,0 \end{aligned}$$

**Area**

$$A^1 = \frac{1}{2} (b_1^1 c_2^1 - b_2^1 c_1^1) = \frac{1}{2} (0,02) = 0,01$$

**Funciones Base**

$$N_1^1(x, y) = \frac{1}{2A^1}(a_1^1 + b_1^1x + c_1^1y) = \frac{1}{2(0,01)}(0,02 - 0,1x + 0,1y) = \frac{1}{2(0,01)}0,1(0,2 - x + y) \\ = 5(0,2 - x + y) = 1 - 5x + 5y$$

$$N_2^1(x, y) = \frac{1}{2A^1}(a_2^1 + b_2^1x + c_2^1y) = \frac{1}{2(0,01)}(0,04 - 0,1x - 0,1y) = \frac{1}{2(0,01)}0,1(0,4 - x - y) \\ = 5(0,4 - x - y) = 2 - 5x - 5y$$

$$N_3^1(x, y) = \frac{1}{2A^1}(a_3^1 + b_3^1x + c_3^1y) = \frac{1}{2(0,01)}(-0,04 + 0,2x + 0,0y) = \frac{1}{2(0,01)}0,2(-0,2 + x) \\ = 5(-0,2 + x) = -2 + 10x$$

Para  $e = 2$

calculo de los coeficientes  $a_i^2, b_i^2, c_i^2$   $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} a_1^2 &= x_2^2 y_3^2 - x_3^2 y_2^2 = (0,3)(0,0) - 0,1(0,4) = -0,04 \\ a_2^2 &= x_3^2 y_1^2 - x_1^2 y_3^2 = (0,4)(0,2) - (0,0)(0,4) = 0,08 \\ a_3^2 &= x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 = (0,4)(0,1) - (0,2)(0,3) = -0,02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1^2 &= y_2^2 - y_3^2 = 0,1 & c_1^2 &= x_3^1 - x_2^1 = 0,4 - 0,3 = 0,1 \\ b_2^2 &= y_3^2 - y_1^2 = -0,2 & c_2^2 &= x_1^1 - x_3^1 = 0,4 - 0,4 = 0,0 \\ b_3^2 &= y_1^2 - y_2^2 = 0,1 & c_3^2 &= x_2^1 - x_1^1 = 0,3 - 0,4 = -0,1 \end{aligned}$$

**Area**

$$A^2 = \frac{1}{2}(b_1^2 c_2^2 - b_2^2 c_1^2) = \frac{1}{2}(0,02) = 0,01$$

**Funciones Base**

$$N_1^2(x, y) = \frac{1}{2A^2}(a_1^2 + b_1^2x + c_1^2y) = \frac{1}{2(0,01)}(-0,04 + 0,1x + 0,1y) = \frac{1}{2(0,01)}0,1(-0,4 + x + y) \\ = -2 + 5x + 5y$$

$$N_2^2(x, y) = \frac{1}{2A^2}(a_2^2 + b_2^2x + c_2^2y) = \frac{1}{2(0,01)}(0,08 - 0,2x) = \frac{1}{2(0,01)}0,2(0,4 - x) \\ = 4 - 10x$$

$$N_3^2(x, y) = \frac{1}{2A^2}(a_3^2 + b_3^2x + c_3^2y) = \frac{1}{2(0,01)}(-0,02 + 0,1x - 0,1y) = \frac{1}{2(0,01)}0,1(-0,2 + x - y) \\ = -1 + 5x - 5y$$

Análogamente para los demás elementos.

Resumiendo tenemos las funciones base para cada uno de los elementos

$$\begin{array}{llll} e = 1, & N_1^1(x, y) = 1 - 5x + 5y, & N_2^1(x, y) = 2 - 5x - 5y, & N_3^1(x, y) = -2 + 10x \\ e = 2, & N_1^2(x, y) = -2 + 5x + 5y, & N_2^2(x, y) = 4 - 10x, & N_3^2(x, y) = -1 + 5x - 5y \\ e = 3, & N_1^3(x, y) = 5x, & N_2^3(x, y) = -1 + 5y, & N_3^3(x, y) = 2 - 5x - 5y \\ e = 4, & N_1^4(x, y) = 1 - 5x + 5y, & N_2^4(x, y) = -10y + 2, & N_3^4(x, y) = -2 + 5x + 5y \\ e = 5, & N_1^5(x, y) = 2 - 5x + 5y, & N_2^5(x, y) = -5x - 5y + 3, & N_3^5(x, y) = -4 + 10x \\ e = 6, & N_1^6(x, y) = 6 - 10x, & N_2^6(x, y) = -5x - 5y + 2, & N_3^6(x, y) = 10x - 2 \\ e = 7, & N_1^7(x, y) = 5x, & N_2^7(x, y) = -5x + 5y, & N_3^7(x, y) = 1 - 5y \\ e = 8, & N_1^8(x, y) = 5y, & N_2^8(x, y) = 1 - 5x, & N_3^8(x, y) = 5x - 5y \\ e = 9, & N_1^9(x, y) = 10y, & N_2^9(x, y) = 2 - 5x - 5y, & N_3^9(x, y) = -1 + 5x - 5y \\ e = 10, & N_1^{10}(x, y) = 10y, & N_2^{10}(x, y) = 3 - 5x - 5y, & N_3^{10}(x, y) = -2 + 5x - 5y \end{array}$$

Calculemos los  $k_{ij}^e$  teniendo en cuenta que la matriz  $K^e$  es simétrica.

Para  $e = 1$

$$\begin{aligned}
 K^1 &= \begin{bmatrix} \frac{b_1^1 b_1^1 + c_1^1 c_1^1}{4A^1} & \frac{b_1^1 b_2^1 + c_1^1 c_2^1}{4A^1} & \frac{b_1^1 b_3^1 + c_1^1 c_3^1}{4A^1} \\ \frac{b_2^1 b_1^1 + c_2^1 c_1^1}{4A^1} & \frac{b_2^1 b_2^1 + c_2^1 c_2^1}{4A^1} & \frac{b_2^1 b_3^1 + c_2^1 c_3^1}{4A^1} \\ \frac{b_3^1 b_1^1 + c_3^1 c_1^1}{4A^1} & \frac{b_3^1 b_2^1 + c_3^1 c_2^1}{4A^1} & \frac{b_3^1 b_3^1 + c_3^1 c_3^1}{4A^1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(-0,1)(-0,1)+(-0,1)(-0,1)}{4(0,01)} & \frac{(-0,1)(-0,1)+(0,1)(-0,1)}{4(0,01)} & \frac{(-0,1)(0,2)+(0,1)(0,0)}{4(0,01)} \\ \frac{(-0,1)(-0,1)+(0,1)(-0,1)}{4(0,01)} & \frac{(-0,1)(-0,1)+(-0,1)(-0,1)}{4(0,01)} & \frac{(-0,1)(0,2)+(-0,1)(0,0)}{4(0,01)} \\ \frac{(-0,1)(0,2)+(0,1)(0,0)}{4(0,01)} & \frac{(-0,1)(0,2)+(-0,1)(0,0)}{4(0,01)} & \frac{(0,2)(0,2)+0,0}{4(0,01)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

además

$$u_1^1 = U_1 \quad u_2^1 = U_9 \quad u_3^1 = U_3$$

entonces tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_9 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \end{Bmatrix}$$

ordenando y expandiendo  $K^1$  según el vector  $U = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_4, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{10}, U_{11})$

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ 0 \\ F_3^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para  $e = 2$

$$\text{donde } u_1^2 = U_2 \quad u_2^2 = U_3 \quad u_3^2 = U_{10}$$

tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \end{Bmatrix}$$

ordenando y expandiendo según el vector  $U = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_4, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{10}, U_{11})$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_3^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

luego sumando  $K^1$ ,  $K^2$  y  $F^1$  con  $F^2$  tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & 1+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_1^2 \\ F_3^1 + F_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_2^1 \\ F_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así sucesivamente para los elementos  $e = 3 \dots e = 10$

$$\begin{bmatrix} 2,5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & -1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 2,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 2 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \end{pmatrix}$$

y

$$F = \begin{pmatrix} F_1^1 + F_1^3 + F_1^4 + F_1^7 + F_1^8 \\ F_1^2 + F_3^4 + F_1^5 \\ F_3^1 + F_2^2 + F_2^4 + F_1^9 \\ F_3^5 + F_1^6 + F_1^{10} \\ F_1^6 \\ F_2^3 \\ F_3^3 + F_2^7 \\ F_3^7 + F_2^8 \\ F_2^1 + F_3^8 + F_2^9 \\ F_3^2 + F_2^5 + F_3^9 + F_2^{10} \\ F_2^6 + F_3^{10} \end{pmatrix}$$

La condición de frontera de Dirichlet se aplican a los valores nodales cuyos nodos se encuentran sobre  $L6$  y  $L7$ . Los nodos que se encuentran sobre  $L6$  y  $L7$  son los nodos 6, 7, 8, 9, 10, 11 entonces hay 6 nodos sobre la frontera de dirichlet, luego  $N_d = 6$ .

Veamos el arreglo  $nd(i)$ ,  $i = 1, \dots, N_d$

$$nd(1) = 6, \quad nd(2) = 7, \quad nd(3) = 8, \quad nd(4) = 9, \quad nd(5) = 10, \quad nd(6) = 11$$

como

$$u = 4 \text{ en } L6 \text{ y } L7$$

$p(i)$  es el valor nodal en el nodo  $i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  y  $U_{nd(i)} = p(i)$

$$p(1) = 4, \quad p(2) = 4, \quad p(3) = 4, \quad p(4) = 4, \quad p(5) = 4, \quad p(6) = 4,$$

Para  $i = 1$ ,  $U_{nd(1)} = p(1)$ , pero  $nd(1) = 6$  y  $p(1) = 4$  entonces  $U_6 = 4$ .

Análogamente tenemos

$$U_7 = 4, \quad U_8 = 4, \quad U_9 = 4, \quad U_{10} = 4, \quad U_{11} = 4$$

luego haciendo las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} k_{nd(i), nd(i)} &\leftarrow 1 & i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ F_{nd(i)} &\leftarrow p(i) & i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ k_{nd(i), l} &\leftarrow 0 & l = 1, \dots, 11 ; \quad l \neq nd(i) \\ k_{l, nd(i)} &\leftarrow 0 & l \neq nd(i) \end{aligned}$$

y finalmente

$$F_l \leftarrow F_l - k_{l, nd(i)} \cdot p(i)$$

para  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  lo cual permitirá reducir el sistema de ecuaciones de 11 incógnitas y 11 ecuaciones a un sistema con 5 incógnitas y 5 ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2,5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & -1 & -0,5 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 2,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}$$

donde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 - p(1)k_{16} - p(2)k_{17} - p(3)k_{18} - p(4)k_{19} - p(5)k_{110} - p(6)k_{111} \\ F_2 - p(1)k_{26} - p(2)k_{27} - p(3)k_{28} - p(4)k_{29} - p(5)k_{210} - p(6)k_{211} \\ F_3 - p(1)k_{36} - p(2)k_{37} - p(3)k_{38} - p(4)k_{39} - p(5)k_{310} - p(6)k_{311} \\ F_4 - p(1)k_{46} - p(2)k_{47} - p(3)k_{48} - p(4)k_{49} - p(5)k_{410} - p(6)k_{411} \\ F_5 - p(1)k_{56} - p(2)k_{57} - p(3)k_{58} - p(4)k_{59} - p(5)k_{510} - p(6)k_{511} \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos

$$\begin{bmatrix} 2,5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & -1 & -0,5 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 2,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - 4(0) - 4(-1) - 4(0) - 4(-0,5) - 4(0) - 4(0) \\ F_2 - 4(0) - 4(0) - 4(0) - 4(0) - 4(0) - 4(0) \\ F_3 - 4(0) - 4(0) - 4(0) - 4(-1) - 4(-1) - 4(0) \\ F_4 - 4(0) - 4(0) - 4(0) - 4(0) - 4(-1) - 4(-0,5) \\ F_5 - 4(0) - 4(0) - 4(0) - 4(0) - 4(0) - 4(-0,5) \end{bmatrix}$$

luego el sistema de ecuaciones a resolver será

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} 2,5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & -1 & -0,5 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 2,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + 6 \\ F_2 + 0 \\ F_3 + 8 \\ F_4 + 6 \\ F_5 + 2 \end{bmatrix}$$

como la función  $f = 0$  entonces  $F_i = g_i$

$$F_1 = g_1, \quad F_2 = g_2, \quad F_3 = g_3, \quad F_4 = g_4, \quad F_5 = g_5$$

Ahora imponemos condiciones de contorno de Neumann al sistema de ecuaciones.

Los nodos: 6, 1, 2, 4, 5 y 11 son aquellos en donde se tiene la condición de Neumann; luego el arreglo  $ns(i, s)$  es numerado como:

$s$	$ns(1, s)$	$ns(2, s)$
1	11	5
2	5	4
3	4	2
4	2	1
5	1	6

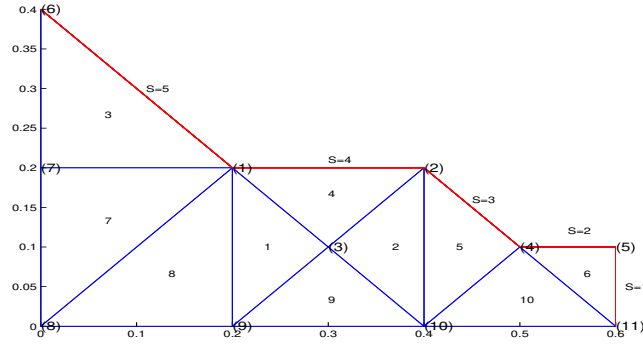


FIGURA 3.3. Enumeración de los segmentos sobre la frontera de Neumann

En todos los nodos interiores se tiene  $g_i = 0$ , así que sólo tenemos que realizar los cálculos de  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_4$ , y  $g_5$

$$g_1 = \int_{\Gamma^4} N_1^4 g \, ds + \int_{\Gamma^5} N_1^3 g \, ds \quad \text{y se cumple: } ne(1, 4) = ne(1, 3) = 1; \quad ns(2, 4) = ns(1, 5) = 1$$

$$g_2 = \int_{\Gamma^3} N_1^5 g \, ds + \int_{\Gamma^4} N_3^4 g \, ds \quad \text{y se cumple: } ne(1, 5) = ne(3, 4) = 2; \quad ns(2, 3) = ns(1, 4) = 2$$

$$g_4 = \int_{\Gamma^2} N_1^6 g \, ds + \int_{\Gamma^3} N_3^5 g \, ds \quad \text{y se cumple: } ne(1, 6) = ne(3, 5) = 4; \quad ns(2, 2) = ns(1, 3) = 2$$

$$g_5 = \int_{\Gamma^1} N_3^6 g \, ds + \int_{\Gamma^2} N_3^6 g \, ds \quad \text{y se cumple: } ne(3, 6) = ne(3, 6) = 5; \quad ns(2, 1) = ns(1, 2) = 5$$

Ahora calculemos los  $g_i$ ,  $i = 1, 2, 4, 5$

$$g_1 = \int_{\text{nod2}}^{\text{nod1}} N_1^4 g \, ds + \int_{\text{nod1}}^{\text{nod6}} N_1^3 g \, ds = \int_{L2} N_1^4 g \, ds + \int_{L1} N_1^3 g \, ds$$

• **En L2** (segmento  $S = 4$  que se encuentra a la derecha del nodo 1):

$$N_1^4(x, y) = -5x + 5y + 1, \quad g(x, y) = x$$

reparametrizando el segmento L2

$$\begin{aligned} T(\xi) &= (0,4 + \xi(0,2 - 0,4), 0,2 + \xi(0,2 - 0,2)) \\ &= (0,4 - 0,2\xi, 0,2), \quad \xi \in [0, 1] \end{aligned}$$

$l^s = J(\xi) = \sqrt{(0,2)^2} = 0,2$ ;  $l^s$  longitud del segmento de la derecha al nodo 1,

$$N_1^4(T(\xi)) = -5(0,4 - 0,2\xi) + 5(0,2) + 1 = \xi, \quad g(T(\xi)) = 0,4 - 0,2\xi$$

$$\int_0^1 N_1^4(T(\xi)) g(T(\xi)) J(\xi) \, d\xi = \int_0^1 \xi(0,4 - 0,2\xi) 0,2 \, d\xi = 0,2 \int_0^1 0,4\xi - 0,2\xi^2 \, d\xi = 0,0266667$$

• **En L1** (segmento  $S = 5$  que se encuentra a la izquierda del nodo 1)

$$N_1^3(x, y) = 5x, \quad g(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

reparametrizando el segmento L1

$$\begin{aligned} T(\xi) &= (0,2 + \xi(0 - 0,2), 0,2 + \xi(0,4 - 0,2)) \\ &= (0,2 - 0,2\xi, 0,2 + 0,2\xi), \quad \xi \in [0, 1] \end{aligned}$$



$l^{s+1} = J(\xi) = \sqrt{(0,2)^2 + (0,6 - 0,4)^2} = 0,2\sqrt{2}$ ;  $l^{s+1}$  longitud del segmento que se encuentra a la izquierda del nodo 1.

$$N_1^3(T(\xi)) = 5(0,2 - 0,2\xi) = 1 - \xi, \quad g(T(\xi)) = \frac{0,4}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^1 N_1^3(T(\xi))g(T(\xi))J(\xi) d\xi = \int_0^1 (1 - \xi)\frac{0,4}{\sqrt{2}}0,2\sqrt{2} d\xi = 0,08 \int_0^1 1 - \xi d\xi = 0,04$$

entonces

$$g_1 = 0,2666667 + 0,04 = 0,0666667$$

$$\mathbf{g}_2 = \int_{\text{nodo4}}^{\text{nodo2}} \mathbf{N}_1^5 \mathbf{g} \, ds + \int_{\text{nodo2}}^{\text{nodo1}} \mathbf{N}_3^4 \mathbf{g} \, ds = \int_{\mathbf{L3}} \mathbf{N}_1^5 \mathbf{g} \, ds + \int_{\mathbf{L2}} \mathbf{N}_3^4 \mathbf{g} \, ds$$

• **En L3** (segmento  $S = 3$  que se encuentra a la derecha del nodo 2)

$$N_1^5(x, y) = 2 - 5x + 5y, \quad g(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$$

reparametrizando el segmento L3

$$\begin{aligned} T(\xi) &= (0,5 + \xi(-0,1), 0,1 + \xi(0,1)) \\ &= (0,5 - 0,1\xi, 0,1 + 0,1\xi), \quad \xi \in [0, 1] \end{aligned}$$

$l^s = J(\xi) = \sqrt{(0,5 - 0,4)^2 + (0,1 - 0,2)^2} = 0,1\sqrt{2}$ ;  $l^s$  longitud del segmento de la derecha al nodo 2

$$N_1^5(T(\xi)) = \xi, \quad g(T(\xi)) = \frac{0,6}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^1 N_1^5(T(\xi))g(T(\xi))J(\xi) d\xi = \int_0^1 \xi \frac{0,6}{\sqrt{2}} 0,1\sqrt{2} d\xi = 0,03$$

• **En L2** (segmento  $S = 2$  que se encuentra a la izquierda del nodo 2)

$$N_3^4(x, y) = 5x + 5y - 2, \quad g(x, y) = x$$

reparametrizando el segmento L2

$$\begin{aligned} T(\xi) &= (0,4 + \xi(-0,2), 0,2 + 0\xi) \\ &= (0,4 - 0,2\xi, 0,2), \quad \xi \in [0, 1] \end{aligned}$$

$l^{s+1} = J(\xi) = \sqrt{(0,2 - 0,4)^2 + (0,2 - 0,2)^2} = 0,2$ ;  $l^{s+1}$  longitud del segmento que se encuentra a la izquierda del nodo 2

$$N_3^4(T(\xi)) = 1 - \xi, \quad g(T(\xi)) = 0,4 - 0,2\xi$$

$$\int_0^1 N_3^4(T(\xi))g(T(\xi))J(\xi) d\xi = \int_0^1 (1 - \xi)(0,4 - 0,2\xi)0,2 d\xi = 0,0333$$

entonces

$$g_2 = 0,03 + 0,0333 = 0,06333$$

$$\mathbf{g}_4 = \int_{\text{nod5}}^{\text{nod4}} \mathbf{N}_1^6 \mathbf{g} \, ds + \int_{\text{nod4}}^{\text{nod2}} \mathbf{N}_3^5 \mathbf{g} \, ds = \int_{\mathbf{L4}} \mathbf{N}_1^6 \mathbf{g} \, ds + \int_{\mathbf{L3}} \mathbf{N}_3^5 \mathbf{g} \, ds$$

- **En L4** (segmento  $S = 2$  que se encuentra a la derecha del nodo 4)

$$N_1^6(x, y) = 6 - 10x, \quad g(x, y) = x$$

reparametrizando el segmento L4

$$\begin{aligned} T(\xi) &= (0,6 + \xi(-0,1), 0,1 + \xi(0,1 - 0,1)) \\ &= (0,6 - 0,1\xi, 0,1) , \quad \xi \in [0, 1] \end{aligned}$$

$l^s = J(\xi) = \sqrt{(0,5 - 0,6)^2 + (0,1 - 0,1)^2} = 0,1$   $l^s$  longitud del segmento de la derecha al nodo 4

$$N_1^6(T(\xi)) = \xi, \quad g(T(\xi)) = 0,6 - 0,1\xi$$

$$\int_0^1 N_1^6(T(\xi))g(T(\xi))J(\xi) \, d\xi = \int_0^1 \xi(0,6 - 0,1\xi)0,2 \, d\xi = 0,1 \int_0^1 0,6\xi - 0,1\xi^2 \, d\xi = 0,02666667$$

- **En L3** (segmento  $S = 3$  que se encuentra a la izquierda del nodo 4)

$$N_3^5(x, y) = -4 + 10x \quad g(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}4$$

reparametrizando el segmento L3

$$\begin{aligned} T(\xi) &= (0,5 + \xi(0,4 - 0,5), 0,1 + \xi(0,2 - 0,1)) \\ &= (0,5 - 0,1\xi, 0,1 + 0,1\xi) , \quad \xi \in [0, 1] \end{aligned}$$

$l^{s+1} = J(\xi) = \sqrt{(0,4 - 0,5)^2 + (0,2 - 0,1)^2} = 0,1\sqrt{2}$ ;  $l^{s+1}$  longitud del segmento que se encuentra a la izquierda del nodo 4

$$N_3^5(T(\xi)) = 1 - \xi, \quad g(T(\xi)) = \frac{0,6}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^1 N_3^5(T(\xi))g(T(\xi))J(\xi) \, d\xi = \int_0^1 (1 - \xi) \frac{0,6}{\sqrt{2}} 0,1\sqrt{2} \, d\xi = 0,03$$

entonces

$$g_4 = 0,26666667 + 0,03 = 0,05666667$$

$$\mathbf{g}_5 = \int_{\text{nod11}}^{\text{nod5}} \mathbf{N}_3^6 \mathbf{g} \, ds + \int_{\text{nod5}}^{\text{nod4}} \mathbf{N}_3^6 \mathbf{g} \, ds = \int_{\mathbf{L5}} \mathbf{N}_3^6 \mathbf{g} \, ds + \int_{\mathbf{L4}} \mathbf{N}_3^6 \mathbf{g} \, ds$$

- **En L5** (segmento  $S = 1$  que se encuentra a la derecha del nodo 5)

$$N_3^6(x, y) = -6 + 10x + 5y, \quad g(x, y) = y$$

reparametrizando el segmento L5

$$\begin{aligned} T(\xi) &= (0,6 + \xi(0,6 - 0,6), 0 + \xi(0,1 - 0)) \\ &= (0,6, 0,1\xi) , \quad \xi \in [0, 1] \end{aligned}$$

$$l^s = J(\xi) = \sqrt{(0,6 - 0,6)^2 + (0,1 - 0)^2} = 0,1$$

$l^s$  longitud del segmento de la derecha al nodo 5

$$N_3^6(T(\xi)) = \xi, \quad g(T(\xi)) = 0,1\xi$$

$$\int_0^1 N_3^6(T(\xi))g(T(\xi))J(\xi) d\xi = \int_0^1 \xi 0,1\xi 0,1 d\xi = 0,003333$$

• **En  $L4$**  (segmento  $S = 2$  que se encuentra a la izquierda del nodo 5)

$$N_3^4(x, y) = -6 + 10x + 10y, \quad g(x, y) = x$$

reparametrizando el segmento  $L4$

$$\begin{aligned} T(\xi) &= (0,6 + \xi(0,5 - 0,6), 0,1 + \xi(0,1 - 0,1)) \\ &= (0,6 - 0,1\xi, 0,1), \quad \xi \in [0, 1] \end{aligned}$$

$$l^{s+1} = J(\xi) = \sqrt{(0,6 - 0,5)^2 + (0,1 - 0,1)^2} = 0,1$$

$l^{s+1}$  longitud del segmento que se encuentra a la izquierda del nodo 5

$$N_3^6(T(\xi)) = 1 - \xi, \quad g(T(\xi)) = 0,6 - 0,1\xi$$

$$\int_0^1 N_3^6(T(\xi))g(T(\xi))J(\xi) d\xi = \int_0^1 (1 - \xi)(0,6 - 0,1\xi)0,1 d\xi = 0,0283332$$

entonces

$$g_5 = 0,00333 + 0,0283332 = 0,031666$$

Luego en (3.3) tenemos:

$$\begin{bmatrix} 2,5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & -1 & -0,5 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 2,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,0667 \\ 0,0633 \\ 8,0000 \\ 6,0567 \\ 2,0317 \end{bmatrix}$$

cuya solución es

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,0383 \\ 4,0782 \\ 4,0291 \\ 4,0496 \\ 4,0565 \end{bmatrix}$$

Ahora veamos como es la solución aproximada en cada elemento:

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= u_1^1 N_1^1 + u_2^1 N_2^1 + u_3^1 N_3^1 = U_1 N_1^1 + U_9 N_2^1 + U_3 N_3^1 \\ &= 4,0383(1 - 5x + 5y) + 4(2 - 5x - 5y) + 4,0291(-2 + 10x) \\ &= 0,0995x + 0,195y + 3,9801 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^2(x, y) &= u_1^2 N_1^2 + u_2^2 N_2^2 + u_3^2 N_3^2 = U_2 N_1^1 + U_3 N_2^1 + U_{10} N_3^1 \\ &= 4,0782(-2 + 5x + 5y) + 40,0291(-10x + 4) + 4(-1 + 5x - 5y) \\ &= 0,1x + 0,391y + 3,96 \end{aligned}$$

análogamente para los demás:

$$\begin{aligned}u^3(x, y) &= 0,1915x + 4,0000 \\u^4(x, y) &= 0,1995x + 0,291y + 3,9401 \\u^5(x, y) &= 0,105x + 0,391y + 3,9580 \\u^6(x, y) &= 0,069x + 0,565y + 3,9586 \\u^7(x, y) &= 0,1915x + 4,0000 \\u^8(x, y) &= 0,1915x + 4,0000 \\u^9(x, y) &= 0,291y + 4,0000 \\u^{10}(x, y) &= 0,496y + 4,0000\end{aligned}$$

Comparamos la solución aproximada  $u^e$  del problema (3.1)-(3.2) con la solución exacta  $u(x, y) = xy + 4$  en nodos de la malla de triángulos.

Por ejemplo para el nod1=(0.2,0.2) comparemos los valores  $u^1(nod1) = u^3(nod1) = u^4(nod1) = u^7(nod1) = u^8(nod1)$  de la solución aproximada con el valor  $u(nod1)$  de la solución exacta, obteniendo;

$$u^1(nod1) = u^3(nod1) = u^4(nod1) = u^7(nod1) = u^8(nod1) = 4,0386 \quad y \quad u(nod1) = 4,0400$$

y para los demás vértices tenemos:

$$\begin{aligned}u^2(nod2) &= u^4(nod2) = u^5(nod2) = 4,0782 & u(nod2) &= 4,0800 \\u^1(nod3) &= u^2(nod3) = u^4(nod3) = u^9(nod3) = 4,0291 & u(nod3) &= 4,0300 \\u^5(nod4) &= u^6(nod4) = u^{10}(nod4) = 4,0496 & u(nod4) &= 4,0500 \\u^6(nod5) &= 4,0565 & u(nod5) &= 4,0600 \\u^3(nod6) &= 4,0000 & u(nod6) &= 4,0000 \\u^3(nod7) &= u^7(nod7) = 4,0000 & u(nod7) &= 4,0000 \\u^7(nod8) &= u^8(nod8) = 4,0000 & u(nod8) &= 4,0000 \\u^1(nod9) &= u^8(nod9) = u^9(nod9) = 4,0000 & u(nod9) &= 4,0000 \\u^2(nod10) &= u^5(nod10) = u^9(nod10) = u^{10}(nod10) = 4,0000 & u(nod10) &= 4,0000 \\u^6(nod11) &= u^{10}(nod11) = 4,0000 & u(nod11) &= 4,0000\end{aligned}$$

En seguida se compara los valores de la solución exacta  $u$  con los valores de la solución aproximada  $u^e$ .

$x$	$y$	$u^e(x, y)$	$u(x, y)$	$ u(x, y) - u^e(x, y) $
0.2	0.2	4.0383	4.0400	0.0017
0.4	0.2	4.0782	4.0800	0.0018
0.3	0.1	4.0291	4.0300	0.0009
0.5	0.1	4.0496	4.0500	0.0004
0.6	0.1	4.0565	4.0600	0.0035

**4. Conclusiones.** El método de los elementos finitos es una herramienta numérica que brinda ventajas al momento de diseñar y analizar determinada pieza o elemento definida por ecuaciones elípticas, pues permite modelar formas irregulares con bastante facilidad al igual que un número ilimitado y tipos de condiciones de contorno. Permite variar el tamaño de los elementos para hacer posible el uso de elementos pequeños donde sea necesario (mallas adaptativas). Precisamente una dificultad del método es la generación de mallas para lo cual siempre es posible utilizar un programa comercial que permita generar mallas de alta calidad.

#### Referencias

- [1] Axelsson O. and Barker V. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*. Academic Press, Inc, Orlando-Florida, USA 1984
- [2] Abbott, M. and Basco, D. *Computational Fluid Dynamics. An Introduction for Engineers*. Copublished in the United States with Jhon Wiley & Sons, Inc. , New York, 1989.
- [3] Angirasa, D., Eggle, J. and Nieuwstadt, F. *Numerical Simulation of Transient Natural Convection from an Isothermal Cavity Open on a Side*, Numerical Heat Transfer, Part A., **28**, 755-768, 1995.
- [4] Bejan, A. *Convection Heat Transfer*. Jhon Wiley & Sons, Inc. USA. 1992.
- [5] Claeysen, J. Bravo, E. and Rubio, O. *Thermally driven convective flow in the boundary condition for the pressure*, Numerical Heat Transfer, **34**, 658-672, 2002.
- [6] Durran, R. *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*. Edit. Springer-Verlag, New York 1998.
- [7] Duchateau, P. and Zachmann, D. *Ecuaciones Diferenciales Parciales, Teoría y Problemas*, McGraw-Hill, Mexico 1998.
- [8] Evans, G., Blackledge, J. and Yardley, P. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Edit. Springer-Verlag. London, 2000.
- [9] Farlow, S. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1982.
- [10] Fletcher, C. *Computational Techniques for Fluid Dynamics I*. Springer-Verlag, Sydney, 1990.

- [11] Jianming J. *Finite Element Method in Electromagnetics* Copyright by John Wiley & sons, Inc 1993.
- [12] Flard, J., Manteuffel, T. and McCormick, S. *First-Order System Least Squares (FOSLS) For Convection-Diffusion Problems : Numerical Results*, SIAM J. SCL. Comput. Vol. **19**, No. **5**, pp. 1958-1979, 1998.
- [13] Gustafsson, B ; Kreiss, H. Oliger, Joseph *Time Dependent Problems and Difference Methods* Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, INC; New York; 1995.
- [14] Hoffmann, K. and Chiang S. *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Vol I. Library of Congress Catalog Card Number 93-090310, 1993.
- [15] Marshall, G. *Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Vol. II, Métodos Computacionales en Ciencia e Ingeniería*. Edit. Reverté, Buenos Aires, 1990.
- [16] Murli M. A *Survey of Some Second Order Difference Schemes for Steady-State Convection-Diffusion Equation*. SIAM, 1994, Vol.3 319-331.
- [17] Muñoz R. *Introducción a los Métodos Numéricos para Problemas de la Física Matemática*, Notas del Primer Seminario Internacional de Matemática Aplicada, Universidad de Lima, Lima, 1998.
- [18] Lara, L. *Método de Diferencias Finitas para la Solución de las Ecuaciones de Navier-Stokes*. Tesis Maestría, UNT , 2000.
- [19] Patankar, S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Edit. McGraw-Hill Book Company, USA, 1990.
- [20] Polanco, F. and May L. *An Implicit Finite Difference Approximation to the one-dimensional Transport Equation*, ANZIAM J **42**(E) pp.1179-1198, 2000.
- [21] Quarteroni, V. *A Numerical Approximation of Partial Differential*. Springer-Verlag, U.S.A, 1994.
- [22] Smith, G. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford University Press, 1990.
- [23] Strange, G. *Introduction to Applied Mathematics*, Wellesley-Cambridge Press, Massachusetts, 1990.
- [24] Striwerda, J. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. University of Wisconsin-Madison. U.S.A, 1990.
- [25] Sod, G. *Numerical Methods in Fluid Dynamics: Initial and Initial Boundary-Value Problems*. Cambridge University Press. U.S.A, 1985.
- [26] Tijonov, A. y Samarsky A. *Ecuaciones de la Física Matemática*. Edit. MIR, Moscú, 1983.
- [27] Tveito, A. and Winther, R. *Introduction to Partial Differential Equations. A Computational Approach*. Edit. Springer, 1998.
- [28] Thomas, J. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Edit. Springer-Verlag, New York, Inc, 1995.
- [29] Weinberger, H. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales* Edit. Reverté, S.A. Barcelona, Traducido por Velez C., F. y Linés E., E. de *Partial Differential Equations*, Edit. Blaisdel, 1965.